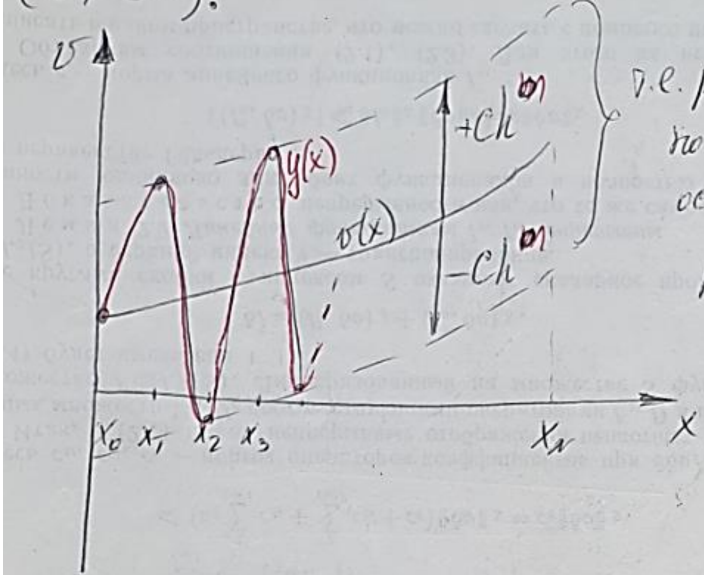
Понятие устойчивости конечно-разностных методов

Проявление неустойчивости

Критерии точности методов типа „погрешность" $z = O(h^m)$, говорят всего лишь, что $|z| \le Ch^m$, где число C м.б. очень большим (но $\ne \infty$).



т.е. решение не выйдет из этой полосы, но внутри полосы возможны сильные осцилляции — неустойчивость решения.

$\Rightarrow$ нужны дополнительные критерии, построенные на физич. смысле поведения решения.

Устойчивость в задаче Коши

Рассмотрим характерную з-чу Коши:

зачем λ - устойч.?

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v, \quad t>0; \quad v(0)=v_0, \quad \lambda<0.$$

$\exists$ аналит. реш: $\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \lambda\int\limits_0^t dt \Rightarrow \boxed{v(t)=v_0 e^{\lambda t}}$

$v(t)$ монотонно убывает при $t\to\infty$

Потребуем и монотонность убывания решения $y(t_i)$, $i=0,1,\dots,n$.

Например, для метода Эйлера получим ($\Delta t = h$):

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \lambda y_i \Rightarrow y_{i+1}=(1+\lambda h)y_i$$

$\boxed{\text{Требуем } |y_{i+1}|\le|y_i|} \Rightarrow |(1+\lambda h)y_i| \le |y_i| \Rightarrow |1+\lambda h|\le 1 \Rightarrow$

монотонность

1. Если $\lambda<0$, то необходимо $h>0$ (т.е. нельзя решать в обратном врем.)
2. Если $h>0$, то $1+\lambda h \ge -1 \Rightarrow h \le \frac{-2}{\lambda} \Rightarrow$ $\lambda<0$

$$\boxed{0<h\le \frac{2}{|\lambda|}}$$

При таком шаге метод Эйлера будет давать монотонно убывающее решение, т.е. метод будет устойчив.

Рассмотрим неявный метод Эйлера: - м. Рунге-Кутта "Пред-Кор"

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \lambda y_{i+1} \Rightarrow (1-h\lambda)y_{i+1} = y_i$$

при $h>0$ всегда будет $|y_{i+1}|\le|y_i| \Rightarrow$ метод абсолютно устойчив.

Явные методы – **условно устойчивы** (есть условие на максимальный шаг).

Неявные методы – **абсолютно устойчивы** (нет условий на шаг).

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\vec{v}, \quad t > 0; \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0,$$

Состояние $\vec{v}$ вектор из m компонент, A – матрица $m \times m$.

Для числ. решения можно применять методы Эйлера, Р-К, Адамса, ~~применя~~я непосредственно к вектору $\vec{v}$. $\det|A - \lambda E| = 0$ ~~степени m~~ ур-ние порядка m

Пусть λ_k, $k = 1, \dots, m$ – собств. числа матрицы A, то систему з-чи Коши можно записать для компонент вектора $\vec{v}$:

$$\frac{dv_k}{dt} = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad t > 0, \quad v_k(0) = v_{0k}$$

В каждом узле x_i сетки ω_h обрабатываются все k ур-ний

Но! λ для разных k могут быть очень разные (разномасштабные уравнения) $\Rightarrow$ разные! условия на шаг h для явных методов.

Жёсткие системы дифференциальных уравнений

Например $|\lambda_1| >> |\lambda_2| \Rightarrow h_1 << h_2$, т.е. процесс, описываемый 1-ым ур-нием намного быстрее протекают (затухают), чем процесс, опис., вторым ур-нием,

для явных методов

а вся система должна решаться при $\boxed{h = \min_k h_k}$,

т.е. для системы:

$$\boxed{h \leq \frac{2}{\max_k |\lambda_k|}}$$

(требование устойчивости явных методов для системы диф. ур-ний)

Если $\min_k |Re\,\lambda_k| << \max_k |Re\,\lambda_k|$, то такие системы называют жёсткими. Число жёсткости:

$$S = \frac{\max\limits_{1 \leq k \leq m} |Re\,\lambda_k|}{\min\limits_{1 \leq k \leq m} |Re\,\lambda_k|},$$

если S - большое, то система жёсткая

Всегда контролируется: $Re\,\lambda_k < 0 \ \forall k$

Жёсткие системы целесообразно решать неявными методами, явные методы из-за чрезмерно малых h - неэффективны. Обычно, неявные схемы приводят к требованию решать нелинейные ур-ния. Их решают итерационно. Подробнее - будет далее.

Замечание 1

Замечание 1. Отметим, что з-ча Коши м.б. и нелинейной, т.е. матрица A может зависеть не только от t, но и от v => собств. числа

$$\lambda_k = \lambda_k(t, v) \qquad h \le \frac{2}{\max\limits_{k,v} |\lambda(t_n, v_k)|}$$

=> шаг h, выбранный до начала решения системы, необходимо проверять ~~в~~ в каждом новом узле x_i на удовлетворение условию устойчивости (для явных методов). В случае нарушения усл. устойчивости: 1- измельчать сетку или 2- повторить все расчёты с более мелким начальным шагом.

Замечание 2

Замечание 2. Задачу Коши для диф. ур-ния высокого порядка можно сводить к системе диф. ур-ний первого порядка и решать известными методами. Например:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = f, \quad \text{введём переменную } w = \frac{dv}{dx} \Rightarrow$$

система первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = w, & \cancel{w(0) = w_0} \quad v(0) = v_0 \\ \dfrac{dw}{dx} = f_1 & w(0) = w_0 \text{ или } \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{t=0} = w_0 \end{cases}$$

Если в ур-нии присутствуют разные порядки ур-ния, т.е. $\exists \ \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 v}{dx^2}$, то мы получаем краевую задачу $\longrightarrow$ где "Н.У." задаются на границах уч-ка, а не в одной его точке.